

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

ابوالفضل گیلک

جلسه هجدهم – فصل هشتم
خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن
تست 44 تا 59

حل تست‌های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 8

خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن

تست 44 تا 59

(علوم کامپیوتر - 97)

44- کدام یک از جملات زیر صحیح است؟

- (1) اگر L_1^* CFL باشد، L_1 CFL است.
- (2) اگر L_1 CFL باشد و L_2 CFL نباشد، پس $L_1.L_2$ می‌تواند CFL باشد.
- (3) اگر L_1 CFL باشد و L_2 CFL نباشد، پس $L_1.L_2$ CFL نیست.
- (4) اجتماع بی‌نهایت زبان CFL، CFL است.

(علوم کامپیوتر - 98)

45- کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن هستند ولی زبان منظم نیستند؟

- (1) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j \text{ \& } 2i \neq j\}$
- (2) $L = \{wtw^R \mid w, t \in \{a, b\}^*\}$
- (3) $Z = \{w\#t \mid w \text{ is a substring of } t \text{ when } w, t \in \{a, b\}^*\}$
- (4) اگر $\Sigma = \{1, \#\}$ و $Y = \{w \mid w = t_1 \# t_2 \# t_3 \# \dots \# t_k \text{ \& } t_i \in 1^* \text{ \& } t_i \neq t_j \text{ whenever } i \neq j\}$

(علوم کامپیوتر - 98)

46- کدام گزینه در مورد زبان مستقل از متن $a^n(ba)^k b^n$ صحیح است؟

- (1) مقدار k باید صفر باشد.
- (2) حداقل یکی از مقادیر n یا k باید ثابت باشد.
- (3) مقدار k باید ضریب صحیحی از n باشد.
- (4) مقدار n و k باید برابر باشند.

47- فرض کنیم L_1 و L_2 زبان‌های منظم باشند. کدام مورد برای زبان $L = \{w : w \in L_1, w^R \in L_2\}$ صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 99)

- (1) منظم است.
- (2) منظم نیست ولی مستقل از متن است.
- (3) منظم نیست ولی گرامر خطی برای آن وجود دارد.
- (4) منظم نیست ولی گرامر خطی راست برای آن وجود دارد.

(علوم کامپیوتر - 99)

48- L یک زبان منظم است. کدام یکی از زبان‌های زیر لزوماً مستقل از متن است؟

- (1) فقط L'
 - (2) فقط L''
 - (3) L' و L'' هر دو
 - (4) هیچ کدام
- $L' = \{ww^R w \mid w \in L\}$ $L'' = \{ww^R u \mid w, u \in L\}$

(علوم کامپیوتر - 99)

49- کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن است؟

- (1) $\{ww^R w : w \in \{0,1\}^*\}$
- (2) $\{0^i 1^j 0^i : i \leq j\}$
- (3) $\{0^{2n} 1^{3n} 0^n : n \geq 0\}$
- (4) $\{w \in \{0,1\}^* : \text{طول } w \text{ فرد و نماد وسطی } w \text{ برابر } 0 \text{ است}\}$

50- گویم زبان L عضو کلاس C است. هرگاه گرامر مستقل از متن برای آن وجود داشته باشد که همه قوانین آن به صورت

$A \rightarrow x$ یا $A \rightarrow xBy$ باشد که x و y رشته‌های پایانی (احتمالاً تهی) هستند. این گزاره‌ها را در نظر بگیرید.

(I) اگر $L_1, L_2 \in C$ آن‌گاه $L_1 \cup L_2 \in C$

(II) اگر $L_1, L_2 \in C$ آن‌گاه $L_1 \cap L_2 \in C$

(III) اگر $L \in C$ آن‌گاه $\bar{L} \in C$

چندتا از این گزاره‌ها درست هستند؟

(علوم کامپیوتر - 1400)

(4) سه

(3) دو

(2) یک

(1) صفر

51- فرض کنید:

$$L_1 = \{a^n w w^R a^n : n \geq 0, w \in \{0,1\}^*\}$$

$$L_2 = \{a^n b^j a^n b^j : n, j \geq 0\}$$

(علوم کامپیوتر - 1400)

کدام یک در مورد این دو زبان درست است؟

(2) L_2 مستقل از متن است ولی L_1 مستقل از متن نیست.

(4) L_1 مستقل از متن است ولی L_2 مستقل از متن نیست.

(1) L_1 و L_2 هر دو مستقل از متن هستند.

(3) L_1 و L_2 هیچ کدام مستقل از متن نیستند.

(علوم کامپیوتر - 1401)

52- کدام یک از دو زبان زیر مستقل از متن است؟

$$L_1 = \{a^n c^m b^n \mid n > m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^k \mid k \neq n + m, n, m, k \geq 0\}$$

(4) هیچ کدام

(3) هر دو

(2) فقط L_2

(1) فقط L_1

53- فرض کنید:

(علوم کامپیوتر - 1402)

$$L_1 = \{w \# x \# w^R \mid w, x \Rightarrow \{0,1\}^*, |w| = |x|\}$$

$$L_2 = \{x \# y \mid x, y \in \{0,1\}^*, |x| = 2|y|\}$$

کدام یک از دو زبان فوق مستقل از متن است؟

(# یک حرف الفباست. همچنین برای هر رشته مانند z ، تعداد حروف z را با $|z|$ نشان می‌دهیم.)

- (1) فقط L_1 (2) فقط L_2 (3) هر دو (4) نه L_1 و نه L_2

54- اگر $w = xw'z$ در این صورت x را یک قطعه اولیه w و z را یک قطعه انتهایی w می‌گوییم (x و w' و z کاملاً دلخواه

هستند. بنابراین می‌توانند رشته تهی نیز باشند.) فرض کنید:

$$P(L) = \{x \mid x \text{ قطعه اولیه رشته‌ای مانند } w \in L \text{ است}\}$$

$$S(L) = \{x \mid x \text{ قطعه انتهایی رشته‌ای مانند } w \in L \text{ است}\}$$

$$P_2(L) = \{x \mid \exists y, |y| \geq 2, xy \in L\}$$

(علوم کامپیوتر - 1402)

از سه عبارت زیر چه تعدادی درست است؟

(الف) اگر L مستقل از متن باشد، آنگاه $P(L)$ مستقل از متن است.(ب) اگر L مستقل از متن باشد، آنگاه $S(L)$ مستقل از متن است.(ج) اگر L منظم باشد، آنگاه $P_2(L)$ منظم است.

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

55- دو زبان L_1 و L_2 را بر $\Sigma = \{a, b\}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{w \mid w \text{ شامل زیررشته } aab \text{ نیست و } n_a(w) = n_b(w)\}$$

$$L_2 = \{a^n b^j a^j b^n \mid n, j \geq 0\}$$

(علوم کامپیوتر - 1403)

از این دو زبان، کدام مستقل از متن است؟

- (1) فقط L_1 (2) فقط L_2 (3) هم L_1 و هم L_2 (4) نه L_1 و نه L_2

56- دو زبان L_1 و L_2 را بر $\Sigma = \{a, b\}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_1 = \{a^n b^j a^n b^j \mid n, j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^j \mid 0 \leq n \leq j^2\}$$

(علوم کامپیوتر - 1403)

از این دو زبان، کدام مستقل از متن است؟

- (1) فقط L_1 (2) فقط L_2 (3) هر دو (4) نه L_1 و نه L_2

57- فرض کنید:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_{ab}(w) = n_{aa}(w)\}$$

(علوم کامپیوتر - 1404)

از این دو زبان کدام منظم است؟

- (1) فقط L_1 (2) فقط L_2 (3) هر دو (4) هیچ کدام

(علوم کامپیوتر - 1404)

58- از دو عبارت زیر کدام صحیح است؟

I: اگر تعدادی متناهی رشته از یک زبان منظم حذف کنیم حاصل یک زبان منظم خواهد بود.

II: اگر تعدادی متناهی رشته به یک زبان غیرمنظم اضافه کنیم حاصل یک زبان غیرمنظم خواهد بود.

- (1) فقط I (2) فقط II (3) هر دو (4) هیچ کدام

59- فرض کنید L زبان گرامر زیر با متغیر شروع S باشد:

$$S \rightarrow aAS$$

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow SbA$$

$$A \rightarrow SS$$

$$A \rightarrow ba$$

(علوم کامپیوتر - 1404)

از دو عبارت زیر کدام صحیح است؟

I: برای هر $w \in L$ ، پنج رشته u, v, x, y, z وجود دارند که $w = uvxyz$ و $|vy| \geq 1$ و برای هر $uv^nxy^n z \in L$ ، $n \in \mathbb{N}$.II: اگر زبان‌های L_1 و L_2 به گونه‌ای باشند به طوری که $L = L_1 \cup L_2$ آن‌گاه L_1 و L_2 هر دو باید مستقل از متن باشند.

- (1) فقط I (2) فقط II (3) هر دو (4) هیچ کدام

پاسخ‌ها**فصل 8: خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن****تست 44 تا 59**

44- گزینه (2) صحیح است.

گزینه ۱ نادرست است. اگر $L = \{a^p \mid p \leq 1 \text{ or } p \text{ is prime}\}$ آنگاه L مستقل از متن نیست اما بستار آن $L^* = \{a^*\}$ منظم و در نتیجه مستقل از متن است. در همین مثال $L^* \in CFL$ در حالی که $L \notin CFL$.
 به این مثال توجه کنید: $L_1 = \{a^*\}$ و $L_2 = \{a^p \mid p \leq 1 \text{ or } p \text{ is prime}\}$ که اولی مستقل از متن است و دومی خیر و با الحاق آنها در یکدیگر داریم $L_1 L_2 = \{a^*\}^*$ که مستقل از متن است. پس گزینه ۲ درست و گزینه ۳ نادرست است.
 نادرستی گزینه ۴ واضح است. هر زبان دلخواه را می‌توان به صورت اجتماع تک‌عضوی‌ها نوشت مثلاً:

$$\{abc\} \cup \{a^2 b^2 c^2\} \cup \dots = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

45- گزینه (1) صحیح است.

در گزینه 1 زبان

$j \neq i$ و $j \neq 2i$ پس $j < i$ یا $i < 2i < j$ یا $j > 2i$ یعنی L اجتماع سه زبان مستقل از متن است پس L مستقل از متن است.

اما روابط خطی بین تعداد حروف نشان می‌دهد L منظم نیست.

در گزینه 2، w و t دلخواه هستند با انتخاب $w = \lambda$ معلوم می‌شود: $L = (a+b)^*$ پس این زبان منظم است.

گزینه های 3 و 4 مستقل از متن نیستند. در گزینه 3 از لم تزریق با در نظر گرفتن $w = a^n b^n \# a^n b^n$ می‌توان نشان داد که Z مستقل از متن نیست. در گزینه 4 ماشین پشته‌ای باید ابتدا اندازه رشته‌های t_1 و t_2 را با هم مقایسه کند، پس از انجام این مقایسه دیگر اطلاعات مورد نیاز برای مقایسه اندازه t_1 با t_3 را در پشته نداریم. البته اگر تعداد مولفه‌ها $k \leq 2$ باشد این زبان مستقل از متن است اما در حالت کلی چنین نیست.

46- گزینه (2) صحیح است.

(گزینه های 1 و 2 هر دو درستند اما گزینه 2 انتخاب کاملتری است و شامل گزینه 1 نیز می‌شود).

منظور طراح سوال آن است که چه شرایطی روی n و k بگذاریم تا زبان $\{a^n (ab)^k b^n \mid ?\}$ مستقل از متن شود. اگر فقط n عدد ثابت باشد این زبان منظم است در نتیجه مستقل از متن است. اگر فقط k عدد ثابت باشد با توجه به ارتباط خطی بین توان‌های n این زبان منظم نیست اما هنوز مستقل از متن است. اگر k مضربی از n باشد مثلاً $k = 2n$ یا با آن برابر باشد: $k = n$ آنگاه ماشین پشته‌ای توان پذیرش این زبان را ندارد و این زبان مستقل از متن نیست البته حساس به متن است. در ضمن گزینه یک را انتخاب نمی‌کنیم چون نیازی نیست که مقدار k صفر باشد، کفایت مقدار یکی از n و k عدد ثابت باشد.

47- گزینه (3) صحیح است.

با توجه به ویژگی‌های بستاری زبان‌های منظم، (بسته بودن تحت وارون و اشتراک) این زبان منظم است.

$$L = \{w : w \in L_1, w^R \in L_2\} = L_1 \cap L_2^R$$

48- گزینه (2) صحیح است.

L زبان منظم دلخواه است پس می‌توانیم در حالت خاص $L = \{a, b\}^*$ را در نظر بگیریم. برای این زبان به L' توجه کنیم:

$$L' = \{ww^R w \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

می‌دانیم ماشین پشته‌ای توان محاسبه و پذیرش چنین زبانی را ندارد در واقع بررسی تساوی بخش اول و بخش آخر کاریست که با پشته قابل انجام نیست. پس L' در حالت کلی مستقل از متن نیست. اما نشان می‌دهیم برای هر زبان منظم L ، زبان L'' مستقل از متن است. فرض کنیم $L_1 = \{ww^R \mid w \in L\}$ در این صورت داریم:

$$L'' = \{ww^R u \mid w, u \in L\} = L_1.L$$

زبان‌های مستقل از متن نسبت به الحاق بسته‌اند. زبان L منظم و در نتیجه مستقل از متن است. کافیت نشان دهیم L_1 نیز مستقل از متن است تا اثبات کامل شود. زبان L دارای DFA است. ماشین پشته‌ای M را به این صورت در نظر بگیرید که همان انتقال‌های DFA را داشته باشد با این تفاوت که با خواندن هر الفبا بدون برداشتن چیزی از پشته، آن الفبا را در پشته درج کند. پس از رسیدن به حالت پذیرش DFA شروع به مقایسه و تطبیق سایر حروف رشته ورودی با محتوای پشته کند و اگر در نهایت به پشته خالی رسید وارد حالت پذیرش پشته شود. به این ترتیب این ماشین پشته‌ای هم شرط $w \in L$ و هم شرط آینه‌ای بودن رشته‌ها را بررسی می‌کند و پذیرنده L_1 است. پس L_1 مستقل از متن است و در نتیجه L'' مستقل از متن است.

49- گزینه (4) صحیح است.

گزینه 1 مستقل از متن نیست ماشین پشته‌ای نمی‌تواند تساوی بخش اول و بخش سوم رشته‌ها را تشخیص دهد. البته با انتخاب رشته‌هایی به فرم $a^n b^n a^n a^n b^n$ و استفاده از لم تزریق زبان‌های مستقل از متن نیز می‌توان نشان داد که این زبان، مستقل از متن نیست. گزینه 2 مستقل از متن نیست. هر سه توان با هم رابطه خطی (به شکل تساوی یا نامساوی) دارند. این یک نمونه شناخته شده از زبان‌های حساس به متنی است که مستقل از متن نیستند. با انتخاب رشته‌های $0^n 1^n 0^n$ و استفاده از لم تزریق نیز می‌توان نشان داد که این زبان، مستقل از متن نیست. گزینه 3 به دلیل مشابه مستقل از متن نیست.

اما گزینه 4 مستقل از متن است. رشته‌های به طول فردی که نماد میانی آنها صفر باشد را می‌توان به این صورت نوشت:

$$L = \{w_1 0 w_2 \mid |w_1| = |w_2|\}$$

ماشین پشته‌ای نمی‌تواند تساوی $w_1 = w_2$ را تشخیص دهد اما می‌تواند تساوی $|w_1| = |w_2|$ را تشخیص دهد. پس این زبان مستقل از متن است. در ضمن گرامر مستقل از متن زیر نیز مولد L است:

$$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0S1 \mid 0$$

50- گزینه (2) صحیح است.

گرامر توصیف شده در صورت سوال، همان گرامر خطی است. پس کلاس C همان خانواده زبان‌های خطی است. زبان‌های خطی نسبت به اجتماع بسته‌اند اما نسبت به اشتراک و مکمل بسته نیستند. بنابراین تنها گزاره درست، گزاره I است.

51- گزینه (4) صحیح است.

زبان L_1 دارای گرامر مستقل از متن زیر است، پس مستقل از متن است:

$$S \rightarrow aSa \mid A$$

$$A \rightarrow 0A0 \mid 1A1 \mid \lambda$$

در زبان L_2 رابطه بین توان‌ها به شکلی است که ماشین پشته‌ای توان پذیرش آن را ندارد.



هنگامی که نوبت به تطبیق تعداد الفباهای a می‌رسد، الفبای b بالای پشته قرار دارد. در ضمن برای اثبات دقیق‌تر می‌توان رشته‌های $a^n b^n a^n b^n$ را در نظر گرفت و نشان داد شرایط لم تزریق برای آنها برقرار نیست.

52- گزینه (2) صحیح است.

زبان L_1 مستقل از متن نیست زیرا دو شرط $p > q$ و $p = r$ روی p ، اعمال شده و امکان برقراری هر دو به صورت هم‌زمان تنها با داشتن یک پشته امکان‌پذیر نیست. زبان L_2 مستقل از متن است زیرا با گرامر مستقل از متن زیر قابل تولید است:

$S \rightarrow A \mid B$
 $A \rightarrow aAc \mid C$
 $C \rightarrow bCc \mid D$
 $D \rightarrow cD \mid c$
 $B \rightarrow aBc \mid aB \mid aE \mid bE$
 $E \rightarrow bEc \mid bE \mid \lambda$

53- گزینه (2) صحیح است.

زبان L_1 مستقل از متن نیست. زیرا پشته نمی‌تواند دو شرط توأم را روی یک بخش از رشته بررسی کند. در واقع وقتی که با استفاده از پشته تساوی $|w|=|x|$ را بررسی کند دیگر اطلاعات رشته w در پشته قرار ندارد تا w و w^R را بررسی کند. (اثبات دقیق‌تر باید با لم تزریق انجام شود). اما زبان L_2 گرامر مستقل از متن دارد در نتیجه مستقل از متن است:

$S \rightarrow AASA \mid \#$
 $A \rightarrow 0 \mid 1$

54- گزینه (4) صحیح است.

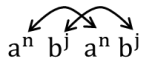
$P(L)$ مجموعه همه پیشوندها و $S(L)$ مجموعه همه پسوند های اعضای L است.
 (الف) درست است. اگر L مستقل از متن باشد، دارای یک پذیرنده PDA است. همه حالات این ماشین را به حالات نهایی (پذیرش) تبدیل کنیم یک پذیرنده PDA برای $P(L)$ خواهیم داشت.
 (ب) درست است. اگر L مستقل از متن باشد، L^R مستقل از متن است. مجموعه پیشوندهای L^R برابر است با مجموعه پسوندهای L بنابراین طبق آنچه در (الف) گفتیم، (ب) نیز درست است.
 (ج) درست است. اگر L منظم باشد، یک پذیرنده NFA به نام M_1 با تنهاییک حالت پذیرش دارد. اکنون ماشین NFA دیگری به نام M_2 با همان حالات و همان گراف انتقال در نظر بگیریم با این تفاوت که حالات پذیرش M_2 آنهایی هستند که حداقل دو الفبا (دو گام غیر تهی) با حالت پذیرش M_1 فاصله دارند. M_2 ، پذیرنده $P_2(L)$ است.

55- گزینه (3) صحیح است.

مجموعه رشته‌هایی که شامل زیررشته aab نیستند زبان منظم است. مجموعه رشته‌هایی که $n_a(w) = n_b(w)$ مستقل از متن است. پس L_1 اشتراک یک مستقل از متن و یک منظم است در نتیجه مستقل از متن است.
 ارتباط بین توان‌ها در زبان $L_2 = \{a^n b^j a^j b^n : n, j \geq 0\}$ طوری است که ماشین پشته‌ای توان پذیرش این زبان را دارد می‌توان ماشین را طوری طراحی کرد که پشته تا یک مرحله پر و از یک مرحله به بعد خالی شود پس ماشین پشته‌ای تک نوبته دارد یعنی مستقل از متن خطی است.

56- گزینه (4) صحیح است.

در رشته‌های زبان $L_1 = \{a^n b^j a^n b^j : n, j \geq 0\}$ ارتباط بین توان‌ها به گونه‌ای هست که ماشین پشته‌ای توان محاسبه آن را ندارد:



پس مستقل از متن نیست. در زبان $L_2 = \{a^n b^j : 0 \leq n \leq j^2\}$ محدودیت $n \leq j^2$ غیرخطی است پس این زبان مستقل از متن نیست. البته هر دو زبان حساس به متن هستند.

57- گزینه (4) صحیح است.

ماشین‌های متناهی (DFA و NFA) حافظه نوشتنی ندارند پس توان محاسبه یا پذیرش زبان‌هایی با محدودیت‌های $w = w^R$ یا $n_{ab}(w) = n_{aa}(w)$ را ندارند مگر آنکه تعداد الگوهای برقراری آنها متناهی باشد. از طرفی با استفاده از لم تزریق زبان منظم نیز می‌توان نشان داد این زبان‌ها نامنظم هستند. (در کتاب و کلاس درس نمونه آن را دیده ایم).

توجه: اگر مجموعه الفبا $\{a, b\}$ باشد زبان $\{w : n_{ab}(w) = n_{ba}(w)\}$ منظم است زیرا برابر است با رشته‌هایی که الفبای ابتدا و انتهای آنها یکسان باشد و نیاز به بررسی تساوی $n_{ab}(w) = n_{ba}(w)$ نداریم.

58- گزینه (3) صحیح است.

به طور کلی افزودن یا حذف تعدادی متناهی از رشته‌ها، منظم یا نامنظم بودن زبان را تغییر نمی‌دهد. همچنین افزودن یا حذف تعدادی متناهی از رشته‌ها، مستقل از متن بودن یا نبودن زبان را تغییر نمی‌دهد.

59- گزینه (4) صحیح است.

گرامر G مستقل از متن است:

$$G: S \rightarrow aAS \mid a$$

$$A \rightarrow SbA \mid SS \mid ba$$

پس $L(G)$ مستقل از متن است. در یک نگاه سریع، نادرستی هر دو جمله روشن است. جمله (I) بیان نادقیقی از لم تزریق زبان‌های مستقل از متن است زیرا اشاره نکرده است که این تجزیه برای رشته‌هایی که اندازه آنها از یک مقدار N بزرگتر باشد امکان‌پذیر است نه برای همه رشته‌ها! جمله (II) نیز نادرست است چون اگر این جمله را بپذیریم نتیجه می‌شود که همه زیرمجموعه‌های یک زبان مستقل از متن، مستقل از متن هستند. نتیجه‌ای که نادرستی آن مشخص است.

پاسخ دقیق‌تر: برخی رشته‌های عضو $L(G)$ را تعیین می‌کنیم.

رشته‌هایی که فقط با الفبای a تولید می‌شوند به فرم $(a(ab)^0 aa)^m a = a^{3m+1}$ هستند. این رشته‌ها توسط قواعد $S \rightarrow aAS \mid a, A \rightarrow SS$ به دست می‌آیند.

جمله (I) نادرست است مثلاً $w = a$ عضو $L(G)$ است. اگر آن را به پنج قطعه $w = uvxyz$ که $|vy| \geq 1$ تجزیه کنیم، همه قطعات λ هستند به جز یکی از قطعات v یا y که برابر با a است. فرض کنیم $v = a$ و سایر فاکتورها تهی باشند. در این صورت $u v^n x y^n z = \lambda a^n \lambda \lambda^n \lambda = a^n$ اما همه توان‌های a عضو $L(G)$ نیستند. مثلاً $a^2 \notin L(G)$.

پروز و سربلند باشید.
پایان جلسه هجدهم نکته و تست